Potenzgesetze
Exponenten und ihre Rechenregeln

Klasse 9a

28. November 2009

1 Definition

Wird eine Zahl mit sich selbst multipliziert, so schreibt man:

$$a \cdot a = a^2$$

Dabei wird a die "Basis" genannt, während die Hochzahl (in diesem Beispiel die 2) als "Exponent" bezeichnet wird. Der Exponent gibt als an, wie oft man die Zahl mit sich selbst multiplizieren muss. Den gesamten Ausdruck, also a^2 nennt man Potenz.
Entsprechend sind Potenzen mit negativem Exponenten definiert:

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}$$

So kann jede Potenz mit einem negativen Exponenten in einen Bruch umgeschrieben werden. Dies ist vor allem hilfreich, wenn man Potenzen zusammenfassen und kürzen möchte.
Nun wollen wir noch betrachten, welchen Wert eine Potenz hat, dessen Expontent Null ist.

$$a^0 = a^{2-2} = a^2 \cdot a^{-2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Dabei haben wir Rechenregeln angewandt, die erst im Folgenden erklärt werden. Dennoch zeigt sich, dass jede Zahl, deren Exponten Null ist, die Zahl 1 ergibt.

2 Rechenregeln

2.1 Potenzen mit gleicher Basis

An einem einfachen Beispiel kann man sich klar machen, wie sich Potenzen mit gleicher Basis zusammenfassen lassen:

$$4^2 \cdot 4^7 = (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = 4^9 = 4^{2+7}$$

Werden also Potenzen mit gleicher Basis multipliziert, so reicht es aus die Exponenten zu addieren. Ebenso lässt sich eine Regel für die Division finden:

$$4^6 : 4^2 = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4} = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 = 4^{6-2}$$

Bei der Division von zwei Potenzen mit der gleichen Basis können also die Exponenten einfach abgezogen werden.
In eine allgemeine Rechenregel umgeschrieben ergibt sich:

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{und} \quad a^n : a^m = a^{n-m}} \tag{1}$$

2.2 Potenzieren von Potenzen

Dieser seltsam anmutende Ausdruck lässt sich sehr einfach durch ein Beispiel veranschaulichen:

$$\left(a^3\right)^2 = (a \cdot a \cdot a)^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^6 = a^{3 \cdot 2}$$

In diesem Beispiel ist die Basis selbst eine Potenz, was durch die Klammer dargestellt wird. Gut zu erkennen ist auch die Rechenregel, da sich die Klammer auflösen lässt, indem man die Exponenten multipliziert. Es gilt damit:

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}} \tag{2}$$

Wichtig ist dabei allerdings die Klammern zu beachten. Dies machen wir uns an einem einfachen Beispiel klar.

$$\left(2^4\right)^2 = 2^8 = 256 \tag{3}$$

$$2^{\left(4^2\right)} = 2^{16} = 65536 \tag{4}$$

Damit wird offensichtlich, welche große Rolle Klammern in diesem Fall spielen. Daher sollte lieber eine Klammer zu viel gesetzt werden.

2.3 Potenzen mit gleichem Exponenten

Auch hier soll zunächst anhand eines Beispiels klar gemacht werden, welche Rechenregeln gelten.

$$2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216 = 6^3 = (2 \cdot 3)^3$$

Werden zwei Potenzen mit unterschiedlicher Basis aber gleichem Exponenten multipliziert, so können auch zunächst die Basen multipliziert und das Ergebnis potenziert werden. Dies gilt ebenso, falls zwei Potenzen mit gleichem Exponenten dividiert werden. Allgemein lässt sich daher schreiben:

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \text{und} \quad a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n} \tag{5}$$

2.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Bisher hatten wir den Exponenten verwendet, um bequem darstellen zu können, wie oft eine Zahl mit sich selbt multipliziert wird. Es bleibt aber die Frage offen, ob auch rationale Zahlen (Brüche) als Exponent zugelassen sind. Um diese Frage zu beantworten betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel.

$$3 = 3^1 = 3^{\frac{2}{2}} = 3^{\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Da in diesem Beispiel keine verbotene Rechenoperation vorkam, gibt es keinen Grund rationale Exponenten zu verbieten. Viel mehr kann man aus dem Beispiel eine Definition ableiten:

$a^{\frac{1}{n}}$ ist diejenige Zahl, deren n-te Potenz a ergibt.

Statt $a^{\frac{1}{n}}$ schreibt man auch $\sqrt[n]{a}$

Mit dieser Definition lassen sich Wurzeln in Potenzen umschreiben und durch die bekannten Regeln der Potenzrechnung zusammenfassen und ggf. vereinfachen.

3 Anmerkungen

- Zu Beachten ist, dass Null als Basis zu Problemen führen kann. So ist $0^5 = 0$ zwar problemlos anzugeben, jedoch führt $0^{-5} = \frac{1}{0^5}$ zu einem nicht definierten Ausdruck.
- Bei negativen Basen ist auf ein korrektes Setzen der Klammer zu achten. So gilt: $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$ aber $-(3)^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$.
- Es sind keine Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ von negativen Zahlen möglich, wenn n gerade ist. So führen gerade Exponenten immer auf eine positive Zahl, da z.B. $(-2)^4 = 16$ ist.