Logarithmen
und ihre Rechenregeln

Klasse 9a des GGD

16. Dezember 2009

1 Einleitung

Bei der Betrachtung von Potentialgleichungen wie $x^4 = 12$ wird die Variable x immer als Basis angegeben. Es reicht also aus, die Gleichung entsprechend um zu formen, um x alleine stehen zu haben. In obigem Beispiel reicht es aus, die 4. Wurzen zu ziehen:

$$x^4 = 12 \Rightarrow x = \sqrt[4]{12}$$

Allerdings bleib die Frage offen, was wir machen können, wenn die Variable x plötzlich als Exponent in einer Gleichung auftaucht. Diese könnte z.B. wie folgt lauten:

$$2^x = 3,5 \tag{1}$$

Wenn wir nun die x. Wurzen ziehen, so bleibt x als Unbekannt erhalten:

$$2 = \sqrt[x]{3,5} = 3,5^{\frac{1}{x}}$$

Daher wollen wir uns zunächst klar machen, was in der Gleichung gesucht ist. In Worte übersetzt könnte man die Gleichung so formulieren: *Mit welcher Zahl muss ich 2 potenzieren, um den Wert 3,5 zu erhalten?*
An einem anderen Beispiel können wir uns diesen Sachverhalt klar machen:

$$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$$

Dieses Beispiel können wir sofort im Kopf lösen, denn $2^3 = 8$ und damit ist $x = 3$ die Lösung dieser Gleichung. Leider ist die Gleichung (1) nicht ganz so einfach zu lösen. Wir können diese Gleichung jedoch grafisch lösen. Mit dem grafikfähigen Taschenrechner oder über eine Wertetabelle lässt sich die Kurve $y = 2^x$ zeichnen. Diese schneiden wir anschließend mit der Geraden $y = 3,5$.

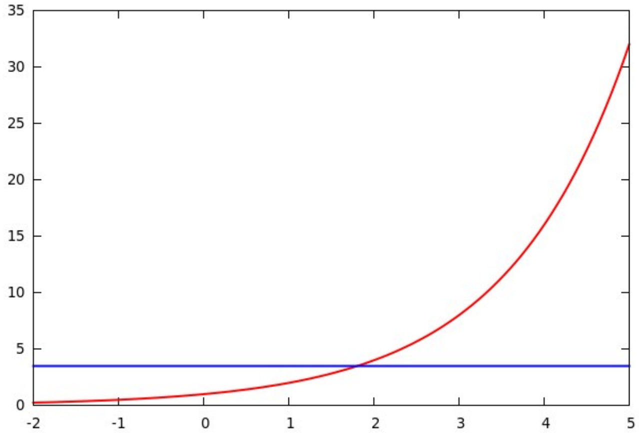

Abb. 1: Grafische Lösung der Gleichung $2^x = 3,5$ mit $y = 2^3$ als rote Kurve und die Gerade $y = 3,5$ ist blau dargestellt.

Durch die „Trace“-Funktion des Taschenrechners lässt sich der Schnittpunkt der Kurven zu S(1,82/3,5) bestimmen. Wir können diese Lösung überprüfen, indem wir sie in die ursprüngliche Gleichung einsetzen. Wir erhalten:

$$2^{1,82} = 3,53 \approx 3,5$$

Wir haben also näherungsweise den richtigen Wert erhalten. Doch bleibt die Frage, wie sich diese Gleichung auch rechnerisch lösen läst, um den exakten Wert für x zu erhalten. Da unsere bisherigen mathematischen Werkzeuge dazu nicht ausreichen, müssen wir einen neue Funktion einführen, den sogenannten *Logarithmus*.

2 Definition

Unter dem *Logarithmus* einer Zahl $n > 0$ zur *Basis* b wird der Exponent der Potenz verstanden, in die b zu erheben ist, um die Zahl x zu erhalten.
In einer Formel ausgedrückt lässt sich dies schreiben als:

$$\boxed{b^x = n \Rightarrow x = \log_b(n)} \tag{2}$$

Wie bei der Potenzrechnung wird b als *Basis* bezeichnet. Wir sagen also: *x ist der Logarithmus zur Basis b von n*
Zu beachten ist hierbei, dass der Logarithmus nicht einfach *heran multipliziert* werden kann. Im Unterschied zur Multiplikation oder Division wird er auf die Gleichung angewandt. Dies soll in folgendem Beispiel verdeutlicht werden:

$$x \cdot y = z \Rightarrow 2 \cdot x \cdot y = 2 \cdot z$$

Hier wurde die Gleichung einfach auf beiden Seiten mit der Zahl 2 multipliziert. Nimmt man nun diese Gleichung und wendet auf beide Seiten den Logarithmus an, so erhält man:

$$x \cdot y = z \Rightarrow \log_b(x \cdot y) = \log_b(z)$$

Es ist also leicht zu erkennen, dass der Logarithmus auf die komplette Gleichung angewandt wird.

Außerdem muss beachtet werden, dass $n > 0$ gelten muss, genau wie es bei Wurzeln der Fall ist. Die Begründung ist auch beim Logarithmus genau gleich, wie sie bei der Wurzel (Zahlen mit rationalem Expontenten) geführt wurde. Im Sonderfall $b = 1$ muss übrigens kein Logarithmus angewandt werden, um die Gleichung zu lösen, denn der Exponent spiel bei der Basis 1 keine Rolle:

$$1^3 = 1^{25{,}734} = 1$$

Daher wird in mancher Literatur der Logarithmus für die Basis 1 nicht definiert, was streng genommen nicht notwendig ist.

3 Einige Eigenschaften

3.1 Potenzen in Logarithmen

Mit Logarithmen lässt sich sehr einfach und konfortabel rechnen, wenn man einige grundlegende Rechenregeln beachtet. Diese werden hier zunächst ohne weitere Begründung angegeben.
Aus der Definition des Logarithmus erhalten wir sofort die erste Rechenregel:

$$\boxed{\log_b(b) = 1} \tag{3}$$

Zu dieser Definition gesellt sich noch eine andere Rechenregel hinzu:

$$\boxed{\log_b(x^a) = a \cdot \log_b(x)} \tag{4}$$

Mit der Regel (4) lassen sich nun schon von einigen speziellen Zahlen die Logarithemen bestimmen:

$$\log_b(1) = \log_b(a^0) = 0 \cdot \log_b(a) = 0 \tag{5}$$

$$\log_b(\sqrt[m]{a}) = \frac{1}{m} \log_b(a) \tag{6}$$

$$\log_b(0) = \log_b(0^5) = \log_b(0^{5000}) = \log_b(0^\infty) = \infty \cdot \log_b(0) \tag{7}$$

Bei Gleichung (7) fällt auf, dass es keinen Exponenten gibt, der eine beliebige Zahl zu 0 macht. Außerdem kann jede beliebige Hochzahl gewählt werden um das gleiche Ergebnis zu erzielen. Man definiert daher $\log_b(0) = \pm\infty$ (∞ = „Unendlich“).

3.2 Punktrechnung innerhalb eines Logarithmus

Es gibt auch einige besondere Eigenschaften, werden Zahlen innerhalb eines Logarithums multipliziert oder geteilt. So gelten folgende Beziehungen:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y) \tag{8}$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y) \tag{9}$$

Diese Rechenregeln sollen nun noch durch ein Beispiel etwas verdeutlicht werden:

$$\begin{aligned} 5\,b^x = n \Rightarrow & \log_b(5\,b^x) = \log_b(n) \\ & \Rightarrow \log_b(5) + \log_b(b^x) = \log_b(5) + x \cdot \log_b(b) = \log_b(n) \\ & \Rightarrow x = \log_b(n) - \log_b(5) = \log_b\left(\frac{n}{5}\right) \end{aligned}$$

Wie man an diesem Beispiel sieht, erhält man durch Anwendung der Logarithmen-Gesetze das selbe Ergebnis, als wenn man die Ausgangsgleichung durch 5 teilt und anschließend den Logarithmus anwendet. Dies zeigt sehr gut, dass die besprochenen Definitionen durchaus Sinn machen.

3.3 Beziehung zwischen Logarithmen verschiedener Basen

Da Logarithmen verschiedner Basen zueinander proportional sind, lässt sich die Basis beliebig umrechnen:

$$\boxed{\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}} \tag{10}$$

Diese Beziehung ist sehr wichtig, falls man beispielsweise einen Taschenrechner benutzen möchte, der lediglich den Logarithmus zu Basis 10 also $\log_{10}$ kennt. So könnte folgende Aufgabe gestellt werden, wobei die Zahl n gesucht ist:

$$\begin{aligned} 2^n = a \Rightarrow \log_2(a) = n \qquad (11) \\ \Rightarrow n = \frac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(2)} \end{aligned}$$

Wie man sieht lässt sich diese Aufgabe sehr leicht mit einem Taschenrechner erledigen, was die Arbeit wesentlich vereinfacht.

<u>Hinweis:</u> Bei den meisten Taschenrechnern steht die Taste „log“ als Abkürzung für $\log_{10}$. Dies führt oft zu Verwechslungen und sollte unbedingt beachtet werden. Im Zweifelsfall hilft es eine Probe durch zu führen, so sollte $\log(10) = 1$ ergeben, falls $\log = \log_{10}$ beim Taschenrechner gilt.