Substitution
an einem Beispiel

Peter Christian

28. Dezember 2006

1 Einführung

Zur Lösung von gewissen Aufgaben ist es sinnvoll eine Substitution durch zu führen. Hierbei wird ein gewisser, meist schwieriger Ausdruck durch eine neue Variable ersetzt. Ein einfaches Beispiel wäre dabei folgende Ersetzung:

$$x^2 = b$$

Bei der Substitution sollte darauf geachtet werden, dass die verwendete neue Variable noch nicht anderweitig schon verwendet wird, da es sonst zu Verwechslungen kommen kann, daher wird sehr gerne auf das altgriechische Alphabet zurück gegriffen. So könnte eine Substitution auch folgendermaßen aussehen:

$$x^4 = \lambda^2 \text{ es gilt also: } x^2 = \lambda$$

Dieses Konzept ist daher sehr gut geeignet, um kompliziert erscheinenede Gleichungen dennoch mit einfachen Methoden lösen zu können. Annhand konkreten Beispieles wollen wir dies jetzt noch vertiefen.

2 Beispielaufgabe

Zu lösen sei die Gleichung

$$\boxed{4 \cdot 3^{-x} + 5 + 3^x = 0} \tag{1}$$

Da auf den ersten Blick keine Lösung dieser Gleichung zu erkenne ist, wird die Substitution angewandt. Dabei bezeichnen wir:

$$3^x = u \Rightarrow 3^{-x} = \frac{1}{3^x} = \frac{1}{u}$$

Bei dieser Substitution wird allerdings vorraus gesetzt, dass $u \neq 0$ ist, was jedoch erfüllt ist, da 3^x für kein x zu 0 werden kann. Wir erhalten also für Gleichung (1):

$$4 \cdot \frac{1}{u} + u + 5 = 0 \tag{2}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit u, so erhalten wir eine quadratische Gleichung:

$$u^2 + 5\,u + 4 = 0 \tag{3}$$

Um diese Gleichung zu lösen, gibt es nun drei Möglichkeiten:

1. Anwenden des Zerlegungssatzes von Vieta
2. Lösung durch die Mitternachtsformel
3. Raten einer Lösung und anschließende Polynomdivision

Im folgenden sollen alle drei Lösungswege aufgezeigt werden:

2.1 Satz von Vieta

Für quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ oder $x^2 + px + q = 0$ macht dieser Satz folgende Aussage[1]:

> Sind x_1 und x_2 Lösungen einer quadratischen Gleichung
> $ax^2 + bx + c = 0 \quad$ bzw. $\quad x^2 + px + q = 0$, so gilt:
>
> $$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \;\text{ und }\; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{bzw. } x_1 + x_2 = -p \;\text{ und }\; x_1 \cdot x_2 = q$$

Zu beachten ist hier allerdings, dass es sich bei obiger Definition um ein Zitat handelt, dessen Notation nicht mit unserer Aufgabe übereinstimmt. Wir haben hier eine Gleichung der Form $u^2 + pu + q = 0$ vorliegen und daher bietet sich folgender Ansatz an:

$$u_1 + u_2 = -5 \;\text{ und }\; u_1 \cdot u_2 = 4$$

Bei genauerem Betrachten fallen einem direkt die Lösungen $u_1 = -1$ und $u_2 = -4$ ins Auge. Diese erfüllen auch in der Tat unsere Gleichung, sie können also als korrekt angesehen werden.

[1] Aus: Formelsammlung Mathematik von Norbert Krank und Horst Sewerin

2.2 Mitternachtsformel

Im Folgenden soll die Mitternachtsforel in der Form:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

verwendet werden. Die Vorfaktoren ergeben sich dabei als: $a = 1$, $b = 5$ und $c = 4$. Damit erhalten wir die Gleichung:

$$u_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

Wir erhalten also auch hier die Lösungen $u_1 = -1$ und $u_2 = -4$.

2.3 Polynomdivision

Bei diesem Verfahren muss zunächst eine Lösung geraten werden. Dies ist allerdings sehr einfach, wenn man die Gleichung (3) in folgender Form betrachtet:

$$u^2 + 5u = -4$$

Sehr schnell ergibt sich hier $u = -1$ als Lösung. Man muss also Gleichung (3) durch das Polynom (u+1) teilen:

$$\begin{array}{r} u^2 + 5u + 4 : (u+1) = u + 4 \\ -(u^2 + u) \\ \hline 4u + 4 \\ -(4u + 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

Damit ergibt sich:

$$u^2 + 5u + 4 = (u+1)(u+4) = 0$$

Somit ergeben sich auch aus dieser Methode sehr leicht die beiden Lösungen $u_1 = -1$ und $u_2 = -4$.

2.4 Rücksubstitution

Bisher haben wir lediglich die Lösungen für u gefunden, um schließlich unser gesuchtes x zu erhalten müssen wir nun noch resubstituieren. Damit ergibt sich $-1 = 3^{x_1}$ sowie $-4 = 3^{x_2}$ als Bestimmungsgleichungen der gesuchten Größe. Wie leicht zu sehen ist, ergibt sich bei logarithmieren dieser Gleichungen Schwierigkeiten. Es ergibt sich nämlich $x_1 = \log_3(-1)$ und $x_2 = \log_3(-4)$ für die gesuchten Größen. Allerdings sind auch diese Gleichungen mit wenigen Anstrengungen und der Beziehung

$$\ln(-1) = \ln(\exp(i\,\pi)) = i\,\pi$$

zu lösen. Hierbei bedeutet $\ln = \log_e$ der natürliche Logarithmus und i ist die imaginäre Einheit wobei $-1 = i^2$ gilt. Da Logarithmen bekanntlich zueinander proportional sind, ergibt sich mit diesen Überlegungen:

$$\boxed{x_1 = \frac{i\,\pi}{\ln(3)} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{2 \cdot \ln(2) + i\,\pi}{\ln(3)}} \tag{4}$$

Somit erhalten wir für diese Aufgabe sehr einfache Lösungen, einzustufen ist sie damit ohne Weiteres in die Klassenstufe 9 von engagierten Gymnasien.